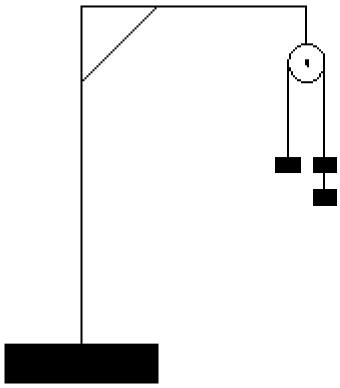
Versuch 5: Untersuchungen zur Beschleunigung an der Atwoodschen Fallmaschine

Theoretische Grundlagen:

I. Erklärung des Modells „Massepunkt“:

Ausgedehnte Körper werden durch einen Punkt dargestellt, in dem man sich die gesamte Masse des Körpers vereinigt denkt. Form und Volumen spielen keine Rolle.
Mit diesem Modell können nur Translationsbewegungen beschrieben werden. Bei der Beschreibung der Bewegung eines Körpers wird die Bahn des Massepunktes dargestellt. Nicht geeignet ist das Modell zum Beispiel bei Rotationsbewegungen eines Körpers.

II. Aufbau der Atwoodschen Fallmaschine und deren Funktion.



Die Atwoodsche Fallmaschine besteht aus einer festen Seilrolle mit möglichst geringer Reibung und möglichst geringer Masse, über die ein dünner Faden gelegt ist. An den beiden Enden dieses Fadens sind zwei gleich große Massen m_1 befestigt, die sich im Gleichgewichtszustand befinden.
Wird an einem Ende des Seiles eine Zusatzmasse m_b befestigt, beginnt das Massensystem eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf der Seite der Beschleunigungsmasse.

III. Auswirkung der Trägheit der Rolle angegeben als linear zu beschleunigende Masse m_{eff}.

$$\underbrace{M = J \cdot \alpha \qquad\qquad \alpha = \frac{a}{r},\ M = F \cdot r}$$

$$\underbrace{F \cdot r = J\frac{a}{r} \qquad\qquad F = m_{eff} \cdot a}$$

$$\underbrace{m_{eff} = \frac{J}{r^2} \qquad\qquad J = \frac{m_R}{2} \cdot r^2}$$

$$m_{eff} = \frac{J}{r^2} = \frac{m_R}{2}$$

m_{eff} ist die Masse, die beschleunigt werden müsste um die gleiche Auswirkung wie das auftretende Trägheitsmoment zu haben.
Die Trägheit der Rolle wirkt also so, als müsse zusätzlich die halbe Masse der Rolle (m_R) linear beschleunigt werden.

© 2002 by Christoph Hoffmann & Johannes Spitzbart

IV. Herleitung einer Gleichung zur Berechnung des Betrags der Beschleunigung der beweglichen Massestücke.

$$F_G = m \cdot a \qquad\qquad m = \left(2 \cdot m_1 + m_b + m_{eff}\right)$$

$$F_G = \left(2 \cdot m_1 + m_b + m_{eff}\right) \cdot a \qquad\qquad F_G = m_b \cdot g$$

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + m_{eff}\right)} \qquad\qquad m_{eff} = \frac{m_R}{2} \ \textit{(aus III.)}$$

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)}$$

ACHTUNG: Diese Formel berücksichtigt zwar die Trägheit der Rolle, nicht aber die Reibungskraft, die in diesem Experiment auftritt.

V. Herleitung einer Gleichung zur Bestimmung der Beschleunigung aus kinematischen Größen.

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Einheitenbetrachtung: $[a] = \underline{\underline{\frac{m}{s^2}}}$

Zu messen sind also nur die kinematischen Größen t und s.

VI. Möglichkeiten um systematische Fehler möglichst gering zu halten.

- ☒ dünner Faden mit möglichst geringer Masse ⇨ da als masselos angenommen
- ☒ Versuch im Vakuum durchführen ⇨ Minimierung der Reibungskraft
- ☒ Rolle mit kleinem Durchmesser und kleiner Masse verwenden
  ↳ Minimierung der Auswirkung der Trägheit
- ☒ Mehrmalige Durchführung
- ☒ Eine weiter beschleunigende Masse ergänzen (diese wird nicht in der Rechnung betrachtet) ⇨ Ausgleich der Reibung

Messwerte:

m_1 in g	50
m_R in g	7,3

© 2002 by Christoph Hoffmann & Johannes Spitzbart

Aufgaben:

1. Berechnung der Beschleunigung *a* über Messwerte aus dem Experiment.

m_b in g	2				3				4				5				6			
Nr.	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
s in cm	45				45				45				45				45			
t in s	3,21	2,79	2,72	2,65	2,18	2,22	2,16	2,13	1,81	1,84	1,81	1,78	2,06	1,56	1,75	1,43	1,20	1,40	1,40	1,44
a in $\frac{m}{s^2}$	0,09	0,12	0,12	0,13	0,19	0,18	0,19	0,20	0,27	0,27	0,27	0,28	0,21	0,37	0,29	0,44	0,63	0,46	0,46	0,43

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

2. Zusammenhang zwischen resultierender (beschleunigender) Kraft F_b und der Beschleunigung *a* der Körper.

m_b in g	2	3	4	5	6
F_b in N	0,020	0,029	0,039	0,049	0,059
$\bar{a}$ in $\frac{m}{s^2}$	0,115	0,190	0,273	0,328	0,495

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)} \qquad F_b = m_b \cdot g$$

$$a = \frac{F_b}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)} = \frac{F_b}{m}$$

↳ *a* ist proportional F_b

© 2002 by Christoph Hoffmann & Johannes Spitzbart

3. Berechnung der erwarteten Beschleunigung mit dem Newtonschen Grundgesetz aus den Messwerten für die Massen der beteiligten Körper und der Fallbeschleunigung *g*.

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)}$$

$$a = \frac{2g \cdot 9{,}80665 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot 50g + 2g + \frac{7{,}3g}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}186 \frac{m}{s^2}}}$$

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)}$$

$$a = \frac{5g \cdot 9{,}80665 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot 50g + 5g + \frac{7{,}3g}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}451 \frac{m}{s^2}}}$$

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)}$$

$$a = \frac{3g \cdot 9{,}80665 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot 50g + 3g + \frac{7{,}3g}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}276 \frac{m}{s^2}}}$$

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)}$$

$$a = \frac{6g \cdot 9{,}80665 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot 50g + 6g + \frac{7{,}3g}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}537 \frac{m}{s^2}}}$$

$$a = \frac{m_b \cdot g}{\left(2m_1 + m_b + \frac{m_R}{2}\right)}$$

$$a = \frac{4g \cdot 9{,}80665 \frac{m}{s^2}}{\left(2 \cdot 50g + 4g + \frac{7{,}3g}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}364 \frac{m}{s^2}}}$$

Einheitenbetrachtung:

$$[a] = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{kg} = \underline{\underline{\frac{m}{s^2}}}$$

© 2002 by Christoph Hoffmann & Johannes Spitzbart

4. Vergleich der experimentellen und rechnerischen Werte für die Beschleunigung a.

m_b in g	Nr.	a in $\frac{m}{s^2}$ (rechnerisch)	a in $\frac{m}{s^2}$ (experimentell)	Δa in $\frac{m}{s^2}$	$\delta a_{\%}$ in %
2	1	0,186	0,09	$\pm$ 0,014	$\pm$ 15,69
	2		0,12	$\pm$ 0,022	$\pm$ 18,03
	3		0,12	$\pm$ 0,022	$\pm$ 18,49
	4		0,13	$\pm$ 0,025	$\pm$ 18,95
3	1	0,276	0,19	$\pm$ 0,044	$\pm$ 23,05
	2		0,18	$\pm$ 0,041	$\pm$ 22,63
	3		0,19	$\pm$ 0,044	$\pm$ 23,26
	4		0,20	$\pm$ 0,047	$\pm$ 23,58
4	1	0,364	0,27	$\pm$ 0,075	$\pm$ 27,74
	2		0,27	$\pm$ 0,074	$\pm$ 27,29
	3		0,27	$\pm$ 0,075	$\pm$ 27,74
	4		0,28	$\pm$ 0,079	$\pm$ 28,20
5	1	0,451	0,21	$\pm$ 0,051	$\pm$ 24,38
	2		0,37	$\pm$ 0,119	$\pm$ 32,16
	3		0,29	$\pm$ 0,083	$\pm$ 28,68
	4		0,44	$\pm$ 0,154	$\pm$ 35,08
6	1	0,537	0,63	$\pm$ 0,263	$\pm$ 41,77
	2		0,46	$\pm$ 0,165	$\pm$ 35,83
	3		0,46	$\pm$ 0,165	$\pm$ 35,83
	4		0,43	$\pm$ 0,150	$\pm$ 34,83

$\bar{a}$ in $\frac{m}{s^2}$ (rechnerisch)	$\bar{a}$ in $\frac{m}{s^2}$ (experimentell)	$\overline{\Delta a}$ in $\frac{m}{s^2}$	$\overline{\delta a_{\%}}$ in %
0,3628	0,28	$\pm$ 0,06848	$\pm$ 21,71

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

$$\overline{\Delta a} = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n}{n}$$

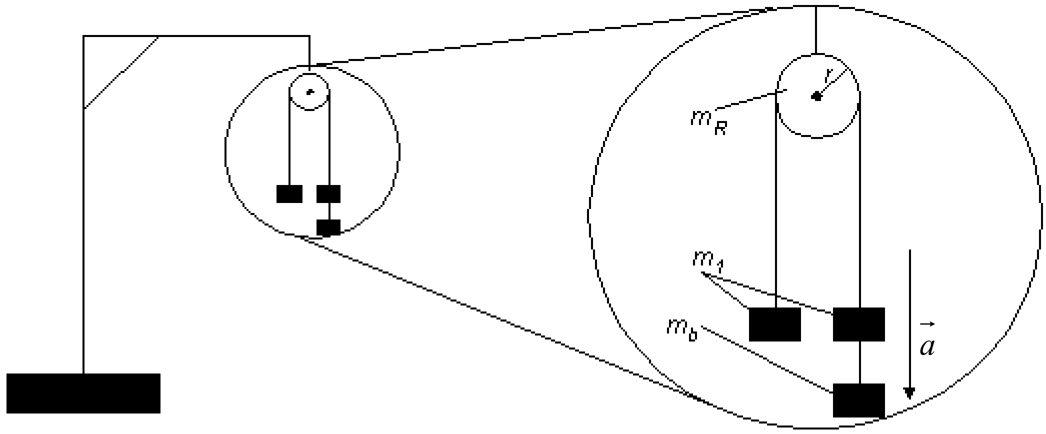
$$\frac{\Delta a}{a} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta s}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta a}{a} = 2 \cdot \frac{\pm 0{,}25s}{t} + \frac{\pm 0{,}05cm}{s} = x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta a = a \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \text{Messfehler: } \delta a_{\%} = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\%$$

© 2002 by Christoph Hoffmann & Johannes Spitzbart

Experimentieranordnung:



m_b …Beschleunigungsmasse
m_R …Masse der Rolle

$\vec{a}$…Beschleunigung
r…Radius der Rolle

Geräte:

Wägesatz
Stativmaterial (unter anderem auch Faden, Rolle)
Waage
Lineal
Stoppuhr

Deutung:

Man kann feststellen, dass mit zunehmender Beschleunigungsmasse m_b die Beschleunigung a steigt, daraus lässt sich ableiten, dass $a \sim F_b$ ist.
Die Messfehler werden mit zunehmender Masse größer, dies kommt durch die immer ungenauere Zeitmessung (aufgrund der Reaktionszeit) zustande, der mittlere prozentuale Fehler liegt bei $\pm 21{,}71\%$.

Fehlerbetrachtung:

Systematische Fehler:

- ☑ Vernachlässigung der Reibung
- ☑ Die Rolle ist reibungsfrei und völlig ohne Masse anzunehmen
- ☑ Vernachlässigung des Trägheitsmoments der Rolle
- ☑ Annahme des Modells „Massepunkt“
- ☑ Faden wird als masselos angenommen
- ☑ Abweichung der Messgeräte (je nach Genauigkeitsklassen)

Zufällige Fehler:

- ☑ Entstehung von Messfehlern durch subjektives Ablesen der Messgeräte
- ☑ Entstehung von Messfehlern durch die Reaktionszeit

© 2002 by Christoph Hoffmann & Johannes Spitzbart