# Versuch 4: Bestimmung der Endgeschwindigkeit an einer geneigten Ebene

## Theoretische Grundlagen:

I. Erklärung des Modells „Massepunkt“:

Ausgedehnte Körper werden durch einen Punkt dargestellt, in dem man sich die gesamte Masse des Körpers vereinigt denkt. Form und Volumen spielen keine Rolle.
Mit diesem Modell können nur Translationsbewegungen beschrieben werden. Bei der Beschreibung der Bewegung eines Körpers wird die Bahn des Massepunktes dargestellt. Nicht geeignet ist das Modell zum Beispiel bei Rotationsbewegungen eines Körpers.

II. Erklärung des Modells „Starrer Körper“:

Der starre Körper ist ein System von Massepunkten mit festen Abständen, die bei beliebig großen Kräften unveränderlich bleiben (keine Dehnung, Verdrehung, usw.). Anwendung findet dieses Modell, wenn Kräfte am Körper nur Translation und Rotation, aber keine Deformation hervorrufen können.

III. Erklärung des Galilei’schen Trägheitsprinzips:

Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich ohne äußere Einwirkung geradlinig gleichförmig oder bleibt in Ruhe.

IV. Formel für die Geschwindigkeit $u$ am Schienenende (unter Berücksichtigung von Rotation und Translation):

Vorraussetzung: Energieerhaltungssatz: $E_{gesamt_{Anfang}} = E_{gesamt_{Ende}}$

Beim Abrollen verringert sich $E_{pot}$, wohingegen $E_{kin}$ zunimmt und sich dabei in einem Rotations- und einem Translationsanteil aufteilt.

$$E_{pot_A} + E_{kin_A} = E_{pot_E} + E_{kin_E} \qquad E_{kin_A} = 0,\ E_{pot_E} = 0$$

$$E_{pot_A} = E_{kin_E} \qquad E_{pot_A} = m \cdot g \cdot h_1$$

$$E_{kin_E} = \frac{1}{2} m \cdot u^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m \cdot u^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \qquad J_K = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

$$g \cdot h_1 = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{5} r^2 \cdot \omega^2 \qquad \omega = \frac{u}{r}$$

$$g \cdot h_1 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{5}r^2 \cdot \left(\frac{u}{r}\right)^2$$

$$g \cdot h_1 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{5}u^2$$

$$g \cdot h_1 = u^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$u = \sqrt{\frac{g \cdot h_1}{\frac{7}{10}}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h_1}{7}}}}$$

$m \ldots$ Masse der Kugel
$g \ldots$ Erdbeschleunigung
$h_1 \ldots$ Höhendifferenz
$u \ldots$ Geschwinigkeit am Ende der Rampe (x - Richtung)
$J \ldots$ Trägheitsmoment
$J_K \ldots$ Trägheitsmoment der Kugel
$\omega \ldots$ Winkelgeschwindigkeit der Rotation

V. Formel für die Geschwindigkeit $u$ am Schienenende (über $s_{th}$):

$$\underbrace{s = u \cdot t \qquad\qquad h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2}$$

$$s_{th} = u \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{h_2}{g}}$$

$$\underline{\underline{u = \frac{s_{th}}{\sqrt{2 \cdot \frac{h_2}{g}}}}}$$

VI. Formel für die Flugweite $s_{th}$ (unabhängig von $g$ und $u$):

$$\underbrace{s_{th} = u \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{h_2}{g}} \qquad\qquad u = \sqrt{\frac{g \cdot h_1}{\frac{7}{10}}}}$$

$$s_{th} = \sqrt{\frac{g \cdot h_1}{\frac{7}{10}}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{h_2}{g}}$$

$$s_{th} = \sqrt{\frac{g \cdot h_1}{\frac{7}{10}} \cdot 2 \cdot \frac{h_2}{g}}$$

$$\underline{\underline{s_{th} = \sqrt{\frac{20}{7} h_1 \cdot h_2}}}$$

VII.Elastischer Stoß:

Impulserhaltungssatz:

$$p_{1_A} + p_{2_A} = p_{1_E} + p_{2_E} \qquad p = m \cdot u$$

$$m_1 \cdot u_{1_A} + m_2 \cdot u_{2_A} = m_1 \cdot u_{1_E} + m_2 \cdot u_{2_E} \qquad u_{2_A} = 0$$

$$m_1 \cdot u_{1_A} = m_1 \cdot u_{1_E} + m_2 \cdot u_{2_E}$$

$$u_{1_A} = \frac{u \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1} \qquad u = \frac{s_{th}}{\sqrt{2 \cdot \frac{h_2}{g}}}$$

$$u_{1_A} = \frac{\frac{s_{th}}{\sqrt{2 \cdot \frac{h_2}{g}}} \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1}$$

# Versuchsdurchführung:

Bevor man das Experiment anhand der Experimentieranordnung aufbaut, muss man die Masse der beiden Kugeln, mit Hilfe einer Waage, bestimmen. Weiterhin sollte die Höhendifferenz zwischen den beiden Kugeln $(h_1)$ sowie die Höhendifferenz zwischen der zweiten Ebene und dem Durchschlagspapier $(h_2)$, mit Hilfe eines Lineals, bestimmt werden.
Nachdem man die geneigte Ebene anhand der Experimentieranordnung aufgebaut hat, sollte man die zweite Kugel so arretieren, dass sie die Geschwindigkeit Null besitzt sowie dass sie beim Herunterrollen der ersten Kugel von dieser getroffen wird. Als nächstes platziert man die erste Kugel auf dem Startpunkt der geneigten Ebene, der Start der Kugel muss so erfolgen, dass sie nur durch die Wirkung der Hangabtriebskraft beschleunigt wird, das heißt eine von Null verschiedenen Geschwindigkeit erlangt. Durch die Beschleunigung der ersten Kugel stoßen die beiden elastisch zusammen, wobei die zweite Kugel auf dem Durchlagspapier landen sollte (ist die nicht der Fall, so muss der Versuch solange wiederholt werden, bis sie auf dem Papier landet). Schließlich wird die Flugweite $(s)$, welche anhand des stärksten Abdrucks auf dem Durchschlagspapier erkenntlich ist, mit Hilfe eines Lineals, bestimmt und protokolliert.
Der Vorgang des elastischen Stoßes und des anschließenden Eintreffens der zweiten Kugel auf dem Durchschlagspapier wird mehrmals (aufgrund höherer Genauigkeit) wiederholt und jedes Mal wird die Flugweite $(s)$ ermittelt und protokolliert. Zu letzt bildet man aus allen Flugweiten einen Mittelwert $(\bar{s})$.

## Messwerte:

| | |
|---|---|
| $m_1$ in $g$ | 63,7 |
| $m_2$ in $g$ | 63,6 |
| $h_1$ in $cm$ | 24 |
| $h_2$ in $cm$ | 14,5 |

| Durchgang | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\bar{s}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ in $cm$ | 24,8 | 24,8 | 24,6 | 23,6 | 24,7 | 25,5 | 24,3 | 24,3 | 24 | 25 | 24,56 |

## Aufgaben:

1. Bestimmen der Endgeschwindigkeit einer Kugel am Ende einer geneigten Ebene mit Hilfe des zentralen, geraden, elastischen Stoßes zweier Kugeln.

**über Formel aus VII.:**

$$\underbrace{u_{1_A} = \frac{\frac{s}{\sqrt{2\cdot\frac{h_2}{g}}}\cdot(m_1+m_2)}{2\cdot m_1} \qquad m_1 \approx m_2 \Rightarrow m_1 = m_2}$$

$$\underbrace{\begin{gathered} u_{1_A} = \frac{\frac{s}{\sqrt{2\cdot\frac{h_2}{g}}}\cdot 2m_1}{2m_1} \\ u_{1_A} = \frac{s}{\sqrt{2\cdot\frac{h_2}{g}}} \qquad s = \bar{s} \end{gathered}}$$

$$u_{1_A} = \frac{\bar{s}}{\sqrt{2\cdot\frac{h_2}{g}}}$$

$$u_{1_A} = \frac{24{,}56cm}{\sqrt{2\cdot\frac{14{,}5cm}{9{,}80665\frac{m}{s^2}}}}$$

$$\underline{\underline{u_{1_A} = 1{,}4282\frac{m}{s}}}$$

Einheitenbetrachtung: $\left[u_{1_A}\right] = \dfrac{m}{\sqrt{m \cdot \dfrac{s^2}{m}}} = \dfrac{m}{\sqrt{s^2}} = \underline{\underline{\dfrac{m}{s}}}$

**über Formel aus IV.:**

$$u = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h_1}{7}}$$

$$u = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}80665 \frac{m}{s^2} \cdot 24cm}{7}}$$

$$\underline{\underline{u = 1{,}8337 \frac{m}{s}}}$$

Einheitenbetrachtung: $\left[u_{1_A}\right] = \sqrt{\dfrac{m}{s^2} \cdot m} = \sqrt{\dfrac{m^2}{s^2}} = \underline{\underline{\dfrac{m}{s}}}$

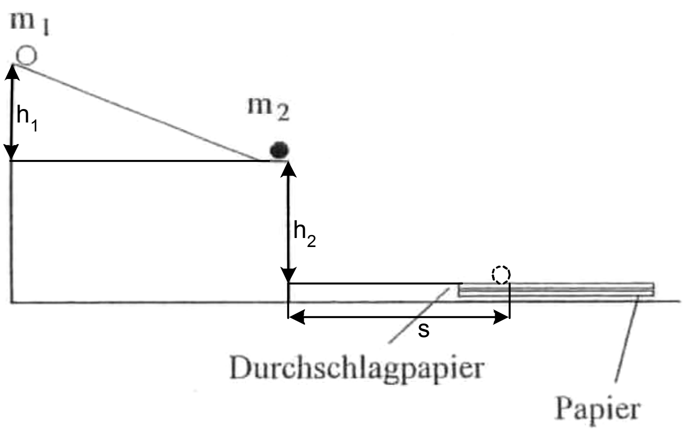
$$\Delta u = u - u_{1_A}$$

$$\underline{\underline{= 0{,}4055 \frac{m}{s}}}$$

## Geräte:

Geneigte Ebene (siehe *Experimentieranordnung*)
Waage
2 Kugeln (mit den Massen $m_1$ und $m_2$)
Lineal
Papier
Durchschlagpapier
Wasserwaage

## Experimentieranordnung:



## Deutung:

Es gibt eine Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta u = 0{,}4055 \frac{m}{s}$.

Diese Differenz kommt unter anderem durch die Vernachlässigung des Rotationsanteils aufgrund der Annahme des Modells „Massepunkt“ in der ersten Variante und durch die Bestimmung von $s$ über das Experiment (siehe Fehlerbetrachtung) zustande. Der Wert über die Formel der zweiten Variante ist genauer, da die Formel die Rotation der Kugel berücksichtigt und nur die Höhe $h_1$ zu messen ist, was weniger Messfehler verursacht.

## Fehlerbetrachtung:

Systematische Fehler:

- ☑ Ungenauigkeit der Messgeräte (Abweichungen nach Genauigkeitsklassen)
- ☑ Vernachlässigung der Trägheit
- ☑ Annahme des Modells „Massepunkt“
- ☑ Annahme des Modells „Starrer Körper“
- ☑ Vernachlässigung der Reibung (zum Beispiel beim Energieerhaltungssatz)
- ☑ Vernachlässigung der Rotationsengergie (siehe *Theoriestische Grundlagen I.*)
- ☑ Die Massen der Kugeln werden als gleichgroß angenommen

Zufällige Fehler:

- ☑ Entstehung von Messfehlern durch subjektives Ablesen der Messgeräte